

Simple types for numbers and booleans

1. Recuerde las siguientes propiedades del lenguaje de números y booleanos:

- **Progreso:** Si $\vdash t : T$, entonces o t es un valor o sino $t \longrightarrow t'$ para algún t' .
- **Preservación:** Si $\Gamma \vdash t : T$ y $t \longrightarrow t'$, entonces $\Gamma \vdash t' : T$.
- **Unicidad de tipos:** Cada término t tiene a lo más un tipo, y si t tiene un tipo, entonces existe exactamente una derivación de ese tipo.

Cada parte de este ejercicio sugiere una manera distinta de cambiar el lenguaje tipeado de expresiones aritméticas y booleanas (ver página 3). Notese que esos cambios no son cumulativos: cada parte empieza con el lenguaje original. En cada parte, para cada propiedad, indique (seleccionando CIERTO o FALSO) si la propiedad sigue cierta o no. Si una propiedad se vuelve falsa, de un contra-ejemplo.

(a) Suponga que agregamos el siguiente axioma de tipeo:

`pred (succ 0) : Bool`

Progreso: CIERTO FALSO, por ejemplo...

Preservación: CIERTO FALSO, por ejemplo...

Unicidad de tipos: CIERTO FALSO, por ejemplo...

(b) Suponga que agregamos el siguiente axioma de evaluación:

`if t1 then t2 else t3 \longrightarrow t1`

Progreso: CIERTO FALSO, por ejemplo...

Preservación: CIERTO FALSO, por ejemplo...

Unicidad de tipos: CIERTO FALSO, por ejemplo...

2. Suponga que agregamos dos nuevos tipos al lenguaje de números y booleanos, llamados `True` y `False`, y las siguientes reglas. (Notese como las dos reglas para `if` permiten asignar tipos a condicionales donde las ramas no son del mismo tipo.)

`true` : `True`

`false` : `False`

$$\frac{t_1 : \text{True} \quad t_2 : T_2 \quad t_3 : T_3}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T_2}$$
$$\frac{t_1 : \text{False} \quad t_2 : T_2 \quad t_3 : T_3}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T_3}$$

- (a) Que tipo(s) pueden ser derivados para el siguiente término?

`if (if true then true else 0) then false else 0`

- (b) El *lemma de inversión* nos dice, para cada forma sintáctica de términos, como términos de esa forma pueden ser asignados tipos por las reglas de tipo—intuitivamente, nos permite “leer la relación de tipo al revés”. (El lemma de inversión del lenguaje original con números y booleanos visto en clase está en anexo.)

Complete las afirmaciones para los siguientes casos del lenguaje enriquecido.

Lemma [Inversion]:

- Si `true` : `T`, entonces

- Si `if t1 then t2 else t3 : T`, entonces

For reference: Boolean and arithmetic expressions

Syntax

$t ::=$

```

true
false
if t then t else t
0
succ t
pred t
iszero t

```

$v ::=$

```

true
false
nv

```

$nv ::=$

```

0
succ nv

```

$T ::=$

```

Bool
Nat

```

terms

constant true
constant false
conditional
constant zero
successor
predecessor
zero test

values

true value
false value
numeric value

numeric values

zero value
successor value

types

type of booleans
type of numbers

Evaluation

$\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3 \longrightarrow t_2$	(E-IFTRUE)
$\text{if false then } t_2 \text{ else } t_3 \longrightarrow t_3$	(E-IFFALSE)
$\frac{t_1 \longrightarrow t'_1}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \longrightarrow \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3}$	(E-IF)
$\frac{t_1 \longrightarrow t'_1}{\text{succ } t_1 \longrightarrow \text{succ } t'_1}$	(E-SUCC)
$\text{pred } 0 \longrightarrow 0$	(E-PREDZERO)
$\text{pred (succ } nv_1) \longrightarrow nv_1$	(E-PREDSUCC)
$\frac{t_1 \longrightarrow t'_1}{\text{pred } t_1 \longrightarrow \text{pred } t'_1}$	(E-PRED)
$\text{iszero } 0 \longrightarrow \text{true}$	(E-ISZEROZERO)
$\text{iszero (succ } nv_1) \longrightarrow \text{false}$	(E-ISZEROSUCC)
$\frac{t_1 \longrightarrow t'_1}{\text{iszero } t_1 \longrightarrow \text{iszero } t'_1}$	(E-ISZERO)

continued on next page...

Typing

$\text{true} : \text{Bool}$	(T-TRUE)
$\text{false} : \text{Bool}$	(T-FALSE)
$\frac{t_1 : \text{Bool} \quad t_2 : T \quad t_3 : T}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T}$	(T-IF)
$0 : \text{Nat}$	(T-ZERO)
$\frac{t_1 : \text{Nat}}{\text{succ } t_1 : \text{Nat}}$	(T-SUCC)
$\frac{t_1 : \text{Nat}}{\text{pred } t_1 : \text{Nat}}$	(T-PRED)
$\frac{t_1 : \text{Nat}}{\text{iszero } t_1 : \text{Bool}}$	(T-ISZERO)

Lemma de Inversión:

- Si $\text{true} : R$, entonces $R = \text{Bool}$.
- Si $\text{false} : R$, entonces $R = \text{Bool}$.
- Si $\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : R$, entonces $t_1 : \text{Bool}$, $t_2 : R$, y $t_3 : R$.
- Si $0 : R$, entonces $R = \text{Nat}$.
- Si $\text{succ } t_1 : R$, entonces $R = \text{Nat}$ y $t_1 : \text{Nat}$.
- Si $\text{pred } t_1 : R$, entonces $R = \text{Nat}$ y $t_1 : \text{Nat}$.
- Si $\text{iszero } t_1 : R$, entonces $R = \text{Bool}$ y $t_1 : \text{Nat}$.